

7	Oplossen met differentieel vergelijkingen .....	1
7.1	Wat is een analytische oplossing?.....	1
7.2	Toestand als de switch gesloten is “switch is on” .....	4
7.3	De relatie tussen $A_1$ en $q$ .....	4
7.4	De relatie tussen $A_1, A_2$ en $q, p$ .....	7
7.5	Conclusie: .....	8
7.6	Opstellen van de vergelijkingen .....	10
7.7	De toestand als de SWITCH gesloten is, dit is de ‘SWITCH is ON’	10
7.8	Het vinden van de constanten A en B uit de beginvoorwaarden	12
7.9	Toestand als de switch OPEN is. Dit is de ‘SWITCH is OFF’. .....	15
7.9.1	De homogene oplossing .....	16
7.9.2	De niet homogene oplossing.....	17
7.9.3	De homogene oplossing + de niet homogene oplossing.....	18
7.10	Het vinden van de constanten C en D uit de beginvoorwaarden	18
7.11	Berekenen van $V_{cp}$ .....	21
7.12	De laatste vergelijking met $I_{dc}$ in functie van $i_o$ .....	27
7.13	Het gemiddelde van $V_{cp}$ moet gelijk zijn aan $V_{cc}$ .....	28
7.14	Berekenen van de componenten .....	29

## 7 Oplossen met differentieel vergelijkingen

### 7.1 Wat is een analytische oplossing?

**Wat heb ik op school geleerd.**

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n$$

Men heeft een aantal vergelijkingen van de vorm  $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots + a_{2n}x_n$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \dots + a_{3n}x_n$$

en als ik evenveel onafhankelijke vergelijkingen heb ( $y_n = f(x_n)$ ) als onbekenden ( $x_n$ ) dan is er steeds een enige oplossing mogelijk voor ( $x_n$ ).

Het klassieke voorbeeld in de algebra is het oplossen van matrixen in de vorm van 
$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$$
 en

als  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  en  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{mn}$  gekend zijn dan kan  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  opgelost worden. Zelfs meer er is maar één exacte oplossing mogelijk. Deze exacte oplossing kan men bekomen door deze matrix op te lossen met de regel van Cramer, of de LU-decompositie regel of met het uitrekenen van de inverse matrix en nog vele andere methodes in verschillende wiskunde boeken besproken.

Maar wat ik niet op school geleerd heb is dat een eenvoudig programmatje (op EXEL of in VISUAL BASIC bv.) ditzelfde kan oplossen door iteratief te werken met de methode van Jacobi. Een EXEL oefening hiervan is afgebeeld in volgende **table 1**

oplossen van matrixen met de methode van Jacobi  
Voorbeeld 3 X 3 matrix

Matrix

	ai1	ai2	ai3	yi
x1	10	-1	1	9
x2	1	20	-3	38
x3	2	-3	25	21

x1	x2	x3	aantal iterr.
0	0	0	0
0.9	1.9	0.84	1
1.006	1.981	0.996	2
0.9985	1.9991	0.99724	3
1.000186	1.999661	1.000012	4
0.999965	1.999993	0.999944	5
1.000005	1.999993	1.000002	6
0.999999	2	0.999999	7
1	2	1	8
1	2	1	9
1	2	1	10
1	2	1	11
1	2	1	12
1	2	1	13
1	2	1	14
1	2	1	15
1	2	1	16
1	2	1	17
1	2	1	18
1	2	1	19
1	2	1	20

de algemene formule is  $x_i = 1/a_{ii} (y_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j)$   
met  $i=1,2,3..n$  rijen en  $j=1,2,3..n$  kolommen  
Dit is een iteratief programma met  $x_i = x_i (n-1)$

De hiervoor gestelde matrix zijn de vergelijkingen van:

$y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3$	
$y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3$	
$y_3 = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3$	

meestal na 9 ..10 itteraties is de oplossing gevonden

**table 1**

Waar het om gaat is dat iteratieve oplossingen dikwijls veel sneller gaan dan analytische "exacte" oplossingen.

Maar ook, vele vergelijkingen zijn niet “exact” op te lossen maar slechts benaderend en dan is de regel van Cramer en al die andere “exacte” oplossingen van geen enkele waarde.

En vele vergelijkingen zijn analytisch niet op te lossen maar alleen iteratief, met andere woorden met “trial and error”. Een klein voorbeeldje:  $\varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$  ofwel heeft men een tafel nodig, wat steeds een benaderende

oplossing geeft, ofwel probeert men  $\varphi \Rightarrow 0 \dots 360^\circ$  totdat  $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{a}{b}$ . Dit laatste kan een computer voor ons zeer snel uitvoeren.

Maar EXEL heeft hiervoor ook een machtig ingebouwd programma, namelijk bij de “tools” vindt men “SOLVER”

In het venster van Solver moet men de volgende vakken invullen.

De “target” cel, wat men wenst op te lossen ( bv.  $P = 2$  Watt), door andere cellen te veranderen de variabele onbekenden (bv  $I_{o1}, I_{o2}, A_1, A_2 \dots$ ) (zie verder in deze rubriek)

$$\varpi \cdot t = 0 \Rightarrow i_o = I_{dc}$$

En de “constraints” (bv. op  $\varpi \cdot t = \pi \Rightarrow i_{o1} = i_{o2}$

$$\varpi \cdot t = 2 \cdot \pi \Rightarrow i_o = I_{dc} \Rightarrow V_{cp} = 0 \Rightarrow \frac{dV_{cp}}{dt} = 0$$

En wanneer er voldoende onafhankelijke “constrains” zijn zal SOVER een oplossing vinden.

SOLVER vindt niet altijd een exacte oplossing, maar een benaderende waarmee men kan verder leven, of men

moet de “constraints” bijstellen. Bv. bij 100% rendement is  $P = V_{cc} \cdot I_{dc} = \frac{V_o \cdot I_o}{2}$ , maar deze conditie kan niet gehaald worden, omdat we geen 100% rendement kunnen bekomen. Onze wensen voor waarheid aannemen doet soms rare dingen. Dus onze target  $\int I_o = I_{dc}$  en tegelijkertijd als “constraints” invullen  $\int V_{cp} = V_{cc}$  zal nooit kunnen gehaald worden tenzij  $Q_L = \infty$  wat onrealistisch is.

Ook andere programma’s zoals Mathematica en MathCad hebben soortgelijke oplossingen, maar vermits er niet zoveel mensen zijn die deze programma’s op hun computer hebben staan, terwijl EXEL zeer wijdverspreid is doe ik al mijn berekeningen ook op EXEL, zodat praktisch iedereen kan blijven volgen. Uit ondervinding weet ik dat dit geweldige frustraties meebrengt als men moeilijke wiskundige artikels doorworsteld en dan doodluik verkondigd: “en dat lossen we dan eventjes op met MathCad, of een Mathematica programma, of de vergelijkingen werden opgelost numeriek met de methode van Newton” of iets dergelijks. Want dan staat men weer voor een onoverkomelijke hindernis en smijt men het artikel in de prullenmand.

Alle functies kunnen neergeschreven worden als een serie van  $e$ -machten in de vorm van  $y = f(x) = a_0 \cdot e^{b_0} + a_1 \cdot e^{b_1} + a_2 \cdot e^{b_2} + a_3 \cdot e^{b_3} + a_4 \cdot e^{b_4} + \dots a_n \cdot e^{b_n}$  Hierin zijn  $a_n$  en  $b_n$  reële of imaginaire getallen of hebben de waarde 0. Vermits in vele gevallen de reeks moet afgebroken worden zal de voorstelling in  $e$ -machten een benaderende waarde bereiken ten opzichte van de exacte functie. Zo is bijvoorbeeld de zeer

gekende functie  $y = A \cdot \sin(x) = \frac{A}{2 \cdot j} \cdot e^{jx} - \frac{A}{2 \cdot j} \cdot e^{-jx}$  de zeer gekende formule van Euler een kleine

toepassing van deze stelling, maar evenzo is  $y = \sin(x) = x - 0.16605 \cdot x^3 + 0.00761 \cdot x^5$  de voorstelling van een sinus functie voor een segment van 0 tot  $\frac{\pi}{2}$  radialen. Maar vermits de sinus tussen  $\frac{\pi}{2}$  en  $\pi$  het verticale

spiegelbeeld is van het vorige segment en tussen  $\pi$  en  $2\pi$  het horizontale spiegelbeeld is van de twee vorige segmenten kan men dus vrij eenvoudig een sinus samenstellen uit de optelling van deze drie elementen. De

fout die men hiermee maakt is kleiner dan  $2 \times 10^{-4}$ . Maar wil ik bijvoorbeeld  $\int \sin(x)$  uitrekenen dan kan ik ook gerust dit neerschrijven als

$$\int \sin(x) = \int x - \int 0.16605 \cdot x^3 + \int 0.00761 \cdot x^5 = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{0.16605}{4} \cdot x^4 + \frac{0.00761}{6} \cdot x^6$$

dit om maar enkele voorbeelden aan te halen van deze merkwaardige stelling die aan de grondslag ligt voor het oplossen van alle mogelijke differentieel vergelijkingen.

## 7.2 Toestand als de switch gesloten is “switch is on”

## 7.3 De relatie tussen $A_1$ en $q$ .

Men kan de schakeling voorstellen zoals in **fig. 1** en **fig. 2** is voorgesteld. We hadden immers gezien dat geheel de schakeling op te vatten is als een pulserende bron, namelijk de oplading van  $C_p$  gedurende de periode dat de schakelaar open was, en een spanning gelijk aan 0 volt gedurende de periode dat de schakelaar gesloten is, en dat deze kan voorgesteld worden als zijnde opgebouwd uit een hele reeks harmonischen van sinussen en cosinussen. We mogen dit voorstellen als een wisselspanningsbron waar we voornamelijk geïnteresseerd zijn in de eerste harmonische.

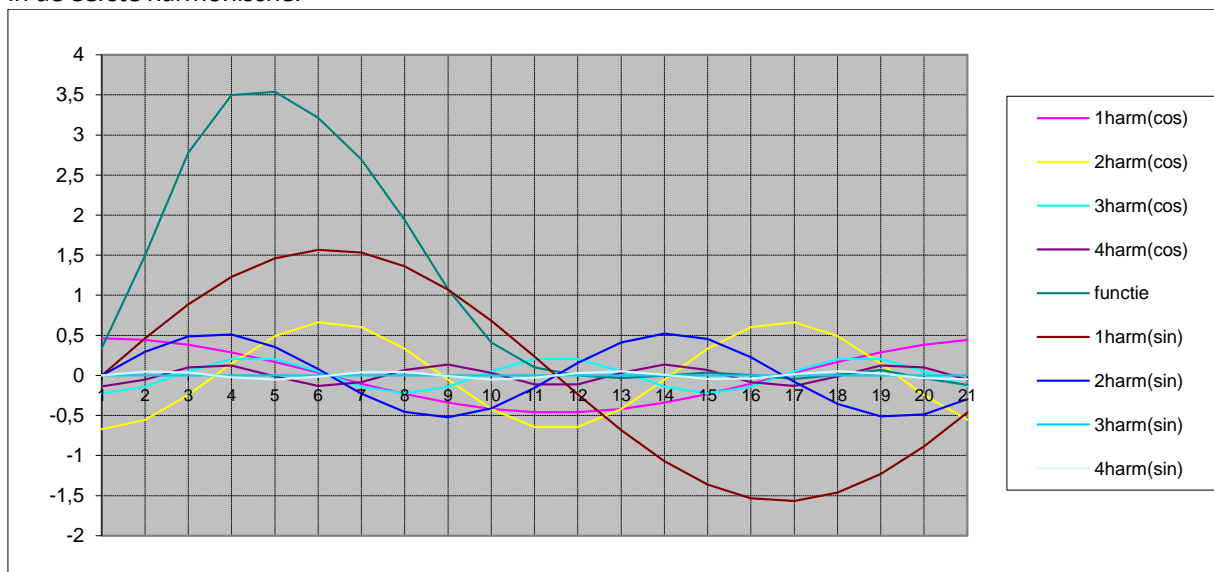


fig. 1

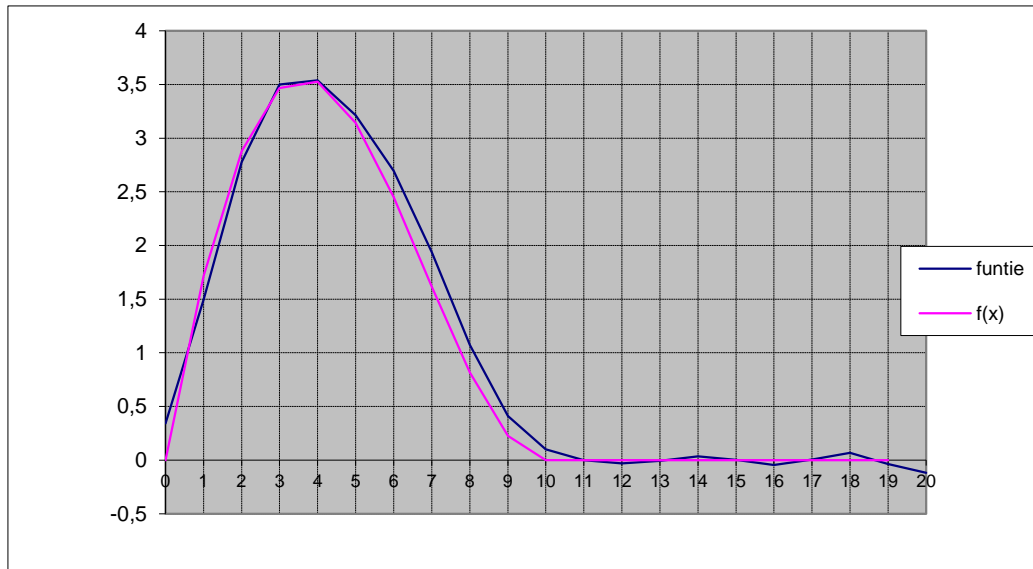


fig. 2

Maar laten we de schakeling iets nauwkeuriger bekijken, dan zien we, wat ook de vorm van de wisselende bron mag zijn, dat we te doen hebben met een LC kring die resonanceert op een frequentie  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_s \cdot C_s}}$

wanneer de schakelaar gesloten is en dat is niet gelijk aan  $\omega = 2\pi \cdot f$  met  $f = \text{grondfrekwentie}$

We kunnen in deze schakeling ook een kwaliteit factor bepalen namelijk

$$Q_1 = \frac{\omega_1 \cdot L_s}{R} \quad (7.3.1)$$

En reeds vroeger hadden we gedefinieerd  $Q_L = \frac{\omega \cdot L_s}{R}$ . Hieruit volgt dat  $\frac{Q_1}{Q_L} = \frac{\omega_1}{\omega} = A_1$  waarin we

definiëren dat  $\frac{\omega_1}{\omega} = A_1$ . Hieruit volgt dus ook  $Q_1 = Q_L \cdot A_1$ .

Zij  $L = L_r + L_\Delta$  zodanig dat  $L_r$  met  $C_s$  in resonantie komt met  $\omega$  of anders gezegd we bepalen  $L_r$  zodanig

dat  $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_r \cdot C_s}}$  en dus  $L_r \cdot \omega = \frac{1}{C_s \cdot \omega}$ .

Bekijken we vanuit de wisselspanningsbron de gehele schakeling dan is de impedantie

$$Z = j \left( L_s \cdot \omega - \frac{1}{C_s \cdot \omega} \right) + R \quad (7.3.2)$$

en met  $L_s = L_r + L_\Delta$  volgt dat  $Z = j \left( L_\Delta \cdot \omega + L_r \cdot \omega - \frac{1}{C_s \cdot \omega} \right) + R = j(L_\Delta \cdot \omega) + R$

En  $\frac{Z}{R} = j \left( \frac{L_\Delta \cdot \omega}{R} \right) + 1$  noemen we  $\left( \frac{L_\Delta \cdot \omega}{R} \right) = q$  want deze uitdrukking heeft ook de dimensies van kwaliteit factor (Q-factor), dan wordt

$$\frac{Z}{R} = j(q) + 1 \quad (7.3.3)$$

Deze impedanties zijn voor te stellen zoals in fig XXXX

Hieruit volgt dat de amplitude van  $\frac{Z}{R} = \sqrt{q^2 + 1}$  en de hoek  $\text{tg}^{-1} = \frac{q}{1}$

Uit (7.3.2) en (7.3.3) volgt dat ook

$$q = \left( \frac{L_s \cdot \omega}{R} - \frac{1}{R \cdot C_s \cdot \omega} \right) \quad (7.3.4)$$

maar als we teller en noemer met  $\omega_1$  vermenigvuldigen dan bekommen we

$$q = \left( \frac{L_s \cdot \omega \cdot \omega_1}{R \cdot \omega_1} - \frac{1 \cdot \omega_1}{R \cdot C_s \cdot \omega \cdot \omega_1} \right) = \frac{Q_L \cdot \omega}{\omega_1} - \frac{Q_L \cdot \omega_1}{\omega} = Q_L \cdot \frac{1}{A_1} - Q_L \cdot A_1 = \frac{Q_L}{A_1} (1 - A_1^2) = Q_L (1 - A_1^2)$$

Samengevat

$$q = Q_L (1 - A_1^2) \quad (7.3.5)$$

En hieruit halen we ook dat

$$A_1 = \sqrt{1 - \frac{q}{Q_L}} \quad (7.3.6)$$

Noteer ook nog dat uit (4) volgt dat

$$\frac{1}{R \cdot C_s \cdot \omega} = \left( \frac{L \cdot \omega}{R} - q \right) = (Q_L - q) \quad (7.3.7)$$

Uit (5) en (7) is ook eenvoudig af te leiden dat

$$\frac{1}{R \cdot C_s \cdot \omega} = Q_L \cdot A_1^2 \quad (7.3.8)$$

(7.3.3) en (7.3.4) leggen dus het verband dat er bestaat tussen  $q = \frac{L_s \cdot \omega}{R}$  en  $A_1 = \frac{\omega_1}{\omega}$  in functie van  $Q_L$ , de kwaliteitsfactor die we als vrije parameter zelf kunnen bepalen.

Gedurende de periode dat de switch gesloten is gedraagt de schakeling zich niets anders dan een uitslingerende sinusoïde, maar die uitslingert op een frequentie bepaald door de  $L, C$  en  $R$  componenten. Dit wil

zeggen op een frequentie die resoneert op  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_s}}$  en met de definitie dat  $\frac{\omega_1}{\omega} = A_1$  of  $\varpi_1 = A_1 \cdot \varpi$

en met een phase verschuiving  $\varphi$  volgt dat  $i_o = I_o \cdot \sin(\omega t - \varphi) A_1$ . Nu op het ogenblik dat de switch zich sluit is de stroom door de switch gelijk aan 0, of anders gezegd op dat ogenblik is  $\omega = 0$  en dit ingevuld geeft ons dat  $I_{dc} = -I_o \cdot \sin(\varphi A_1)$

## 7.4 De relatie tussen $A_1, A_2$ en $q, p$

Wanneer de switch open is dan nu ook zal de schakeling resoneren maar ditmaal niet op een frequentie

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_s \cdot C_s}} \text{ maar wel op een andere frequentie } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_s \cdot \frac{C_s \cdot C_p}{C_s + C_p}}} \text{ hierin is } \frac{C_s \cdot C_p}{C_s + C_p} = C_T \text{ de serie}$$

combinatie van  $C_s$  en  $C_p$ . De toegevoegde  $I_{dc}$  afkomstig van de RFC-spoel zal wel een DC-offset veroorzaken, maar, indien  $I_{dc}$  als een constante kan beschouwd worden, geen invloed hebben op de frequentie.

Definiëren we  $p = C_p \cdot \omega \cdot R$  of  $\frac{1}{p} = \frac{1}{C_p \cdot \omega \cdot R}$  dan kunnen we ook zoals hierboven de gehele schakeling

bekijken zoals on figXXX . Noteer dat volgens Thevenin we een stroombron kunnen omschakelen in een spanningsbron met dezelfde impedantie die parallel aan de stroombron stond nu in serie met de bron komt. Omdat de stroombron een gelijkspanningsbron is zal ook  $V$  een gelijkspanningsbron zijn. Deze bron heeft geen enkele invloed op het wisselstroomgedrag van onze schakeling.

Ook hier kunnen we de schakeling opdelen in een  $C_p, C_s, L_s,$

Bekijken we nogmaals vanuit de spanningsbron de gehele schakeling dan is de impedantie

$$Z = j \left( L_s \cdot \omega - \left( \frac{1}{C_s \cdot \omega \cdot R} + \frac{1}{C_p \cdot \omega \cdot R} \right) \right) + R \text{ ofwel } \frac{Z}{R} = j \left( \frac{L_s \cdot \omega}{R} - \frac{1}{C_s \cdot \omega \cdot R} - \frac{1}{C_p \cdot \omega \cdot R} \right) + 1 \text{ Nu is zoals}$$

$$\text{hiervoor aangetoond } \frac{L_s \cdot \omega}{R} - \frac{1}{C_s \cdot \omega \cdot R} = q \text{ en } \frac{1}{C_p \cdot \omega \cdot R} = \frac{1}{p}$$

$$\text{Of } \frac{Z}{R} = j \left( q - \frac{1}{p} \right) + 1 .$$

$$\text{Hieruit volgt dat de amplitude gelijk is aan } \frac{Z}{R} = \sqrt{\left( q - \frac{1}{p} \right)^2 + 1}$$

Laten we de componenten tussen haakjes eens even beter bekijken dan vinden we dat

$$q - \frac{1}{p} = \frac{L_s \cdot \omega}{R} - \left( \frac{1}{C_s \cdot \omega \cdot R} + \frac{1}{C_p \cdot \omega \cdot R} \right) = \frac{L_s \cdot \omega}{R} - \left( \frac{C_s + C_p}{C_s \cdot C_p \cdot \omega \cdot R} \right) \text{ Nu kunnen we dat ook nog anders}$$

schrijven, namelijk door teller en noemer te vermenigvuldigen met  $\cdot \omega_2$  en  $\frac{C_s \cdot C_p}{C_s + C_p} = C_T$  te vervangen.

$$q - \frac{1}{p} = \frac{L_s \cdot \omega}{R} \cdot \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{1}{C_T \cdot \omega \cdot R} \cdot \frac{\omega_2}{\omega} \text{ of anders geschreven } q - \frac{1}{p} = \frac{L_s \cdot \omega_2}{R} \cdot \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{1}{C_T \cdot \omega_2 \cdot R} \cdot \frac{\omega}{\omega}$$

Ook hierin kunnen we een kwaliteit factor bepalen, namelijk

$$Q_2 = \frac{\omega_2 \cdot L_s}{R}. \text{ Maar ook } Q_2 = \frac{1}{C_T \cdot \omega_2 \cdot R}. \quad (7.4.1)$$

$$q - \frac{1}{p} = Q_2 \cdot \frac{\omega}{\omega_2} - Q_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega}$$

$$\text{en met } \frac{\omega}{\omega_2} = \frac{1}{A_2} \text{ en } \frac{\omega_2}{\omega} = A_2$$

$$q - \frac{1}{p} = \frac{Q_2}{A_2} - Q_2 \cdot A_2 = \frac{Q_2}{A_2} \cdot (1 - A_2^2) \text{ en vermits } \frac{Q_2}{A_2} = Q_L \text{ bekomen we}$$

$$q - \frac{1}{p} = Q_L \cdot (1 - A_2^2) \quad (7.4.2)$$

Indien we nu (7.3.4) en (7.3.7) van elkaar aftrekken dan bekomen we

$$q = Q_L (1 - A_1^2)$$

$$q - \frac{1}{p} = Q_L (1 - A_2^2)$$

$$\frac{1}{p} = Q_L (1 - A_1^2 - 1 + A_2^2) \quad \text{of}$$

$$\frac{1}{p} = Q_L (A_2^2 - A_1^2) \quad (7.4.3)$$

$$\text{En met invulling van } \frac{1}{p} = \frac{1}{R \cdot C_p \cdot \omega} \text{ volgt } \frac{1}{R \cdot C_p \cdot \omega} = Q_L (A_2^2 - A_1^2)$$

## 7.5 Conclusie:

Indien we  $R_L$  kennen en vermits we  $Q_L$  vrij kunnen kiezen, kunnen we als we  $q$  en  $p$  kunnen berekenen de componenten van onze schakeling bepalen. Immers uit  $Q_L = \frac{\omega \cdot L}{R}$ . Kunnen we bereken



$$L_s = \frac{Q_L \cdot R}{\omega} \quad (7.4.4)$$

en met formule (7)  $\frac{1}{R \cdot C_s \cdot \omega} = (Q_L - q)$  vinden we dat

$$C_s = \frac{1}{R \cdot \omega (Q_L - q)} \quad (7.4.5)$$

Vermits we gedefinieerd hebben dat  $\frac{1}{C_p \cdot \omega \cdot R} = \frac{1}{p}$  volgt dat

$$C_p = \frac{p}{\omega \cdot R} \quad (7.4.6)$$

En vermits de relaties van  $p$  en  $q$  alleen afhankelijk zijn van  $A_1$  en  $A_2$  en de gekende waarden  $R_L$  (?) en  $Q_L$  is het voor de rest van de berekeningen gelijk of ik  $p$  en  $q$  ofwel  $A_1$  en  $A_2$  gebruik.

Immers dan is

$$L_s = \frac{Q_L \cdot R}{\omega} \quad \text{zelfde als} \quad (7.4.4)$$

$$C_s = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot Q_L \cdot A_1^2} \quad \text{volgt uit} \quad (7.3.8)$$

$$C_p = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot Q_L \cdot (A_2^2 - A_1^2)} \quad \text{volgt uit} \quad (7.4.3)$$

Noteer dat we tot hertoe geen exacte formule hebben gevonden voor  $R_L$ , maar als  $R_L$  niet juist gedefinieerd is dan zal dat invloed hebben op het vermogen dat te groot of te klein zal zijn vermits  $P = \frac{V_o^2}{2 \cdot R} = \frac{R \cdot I_o^2}{2}$ , ofwel

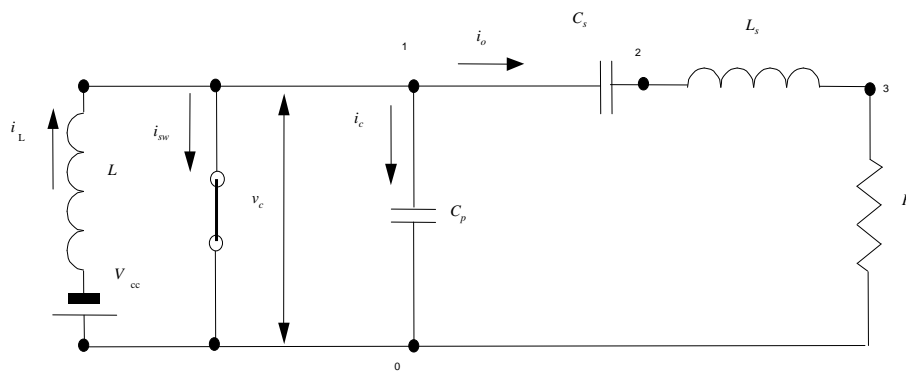
op de Q-factor, vermits  $Q_L = \frac{\omega \cdot L_s}{R}$ . Het is daarom wijselijk om zoveel mogelijk met  $Q_L$  te werken en op het

laatste  $R$  te bepalen als zijnde  $R = \frac{V_o^2}{2 \cdot P} = \frac{P}{2 \cdot I_o^2}$

Immers het product  $\frac{L_s \cdot \omega}{R}, C_s \cdot R \cdot \omega, C_p \cdot R \cdot \omega$  is alleen afhankelijk van de onbekenden  $A_1, A_2$  en voor de rest van de gekende waarden  $Q_L, \omega$

## 7.6 Opstellen van de vergelijkingen

## 7.7 De toestand als de SWITCH gesloten is, dit is de 'SWITCH is ON'



**fig. 3**

Als de switch gesloten is dan is  $C_p$  kortgesloten, en de rest van het circuit is een zuivere RLC keten die uitslingert. Terwijl langs de andere zijde  $L_{RFC}$  tussen  $V_{CC}$  en grond bevindt en zich oplaad volgens de formule  $V_{CC} - V_{RFC} = L_{RFC} \cdot \frac{di}{dt}$ . Hieruit volgt dat gedurende deze periode de stroom  $I_{dc}$  geleidelijk lineair vergroot in functie van de tijd.

In een circuit is volgens de wetten van Kirchoff de som der spanningen gelijk aan 0 ofwel  $V_{CS} + V_{LS} + V_R = 0$

Nu is  $V_R = R \cdot i_o$ ,  $V_{LS} = L_S \cdot \frac{di_o}{dt}$  en  $V_{CS} = \frac{1}{C_S} \int i_o \cdot dt$  ofwel

$$\frac{1}{C_S} \int i_o \cdot dt + L_S \cdot \frac{di_o}{dt} + R \cdot i_o = 0 \text{ ofwel in Laplace notaties}$$

$$\frac{i_o}{C_s \cdot p} + L_s \cdot p \cdot i_o + R \cdot i_o = 0 \quad (7.6.1)$$

of alles vermenigvuldigt met  $p$  en gedeeld door  $L_s$  bekomen we

$$i_o \left( p^2 + \frac{R}{L_s} \cdot p + \frac{1}{L_s \cdot C_s} \right) = 0 \quad (7.6.2)$$

Dit is een algebraïsche vergelijking van de tweede orde en van de vorm  $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$  waarin  $a = 1, b = \frac{R}{L_s}, c = \frac{1}{L_s \cdot C_s}$  en de wortels of de oplossing van deze vergelijking is

$$p_1 = -\frac{R}{2 \cdot L_s} + \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2 - \frac{1}{L_s \cdot C_s}} \quad \text{en} \quad p_2 = -\frac{R}{2 \cdot L_s} - \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2 - \frac{1}{L_s \cdot C_s}}$$

Met  $\sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2 - \frac{1}{L_s \cdot C_s}} < 0$  wordt dit van de vorm  $p_1 = \alpha + j\beta$  en  $p_2 = \alpha - j\beta$  met  $\alpha = \frac{-R}{2 \cdot L_s}$  en

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{L_s \cdot C_s} - \left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2}$$

En volgens de regels van differentieel rekenen (zie wat heb ik op school geleerd) is de oplossing van dit vraagstuk

$$i_o = e^{\alpha \cdot t} (A \cdot \cos(\beta \cdot t) + B \cdot \sin(\beta \cdot t)).$$

Noteer dat  $\frac{R}{2 \cdot L_s} = \frac{\omega \cdot A_1}{2 \cdot Q_1}$  en  $\frac{1}{L_s \cdot C_s} = \frac{\omega^2 \cdot \omega_1^2}{\omega^2} = \omega^2 \cdot A_1$  en dus hebben we als oplossing voor de stroom tussen het tijdsinterval van  $0 - \pi$

$$i_o = e^{\frac{-A_1 \cdot t}{2 \cdot Q_1}} \left[ A \cdot \cos\left(\omega \cdot A_1 \cdot t \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}}\right) + B \cdot \sin\left(\omega \cdot A_1 \cdot t \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}}\right) \right] \quad (7.6.3)$$

Hierin zijn  $A$  en  $B$  twee constanten die nog te zoeken zijn uit de begin voorwaarden.

## Wat heb (of zou) ik op school (moeten)geleerd (hebben).

Hier geef ik een bewijs dat ik zelden in leerboeken tegenkom, namelijk waarom is de oplossing van een differentieel vergelijking van hogere orde altijd een reeks met  $e$ -machten. Een stuk van dit bewijs heb ik gevonden in "Calculus, one and several variables" from Robert Ellis and Denny Gulick. ISBN: 0-15-505692-1

Elke differentieel vergelijking van gelijk welke orde zoals bv.  $a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = 0$  heeft een oplossing

die van de vorm is  $y = A_1 \cdot e^{m_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{m_2 \cdot t} + \dots$

Dit steunt op het feit dat als  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  dan moet voor alle termen  $a_n = b_n$

Dit gaan we toepassen op een eenvoudige differentieële vergelijking zoals bv.  $\frac{dy}{dx} = 3y$  en we bewijzen dat de

algemene oplossing hiervoor is  $y = C_0 \cdot e^{3 \cdot x}$  waarin  $C_0$  een Constante is.

We moeten  $C_n$  nog bepalen. Als  $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$  dan is  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n \cdot x^{n-1}$  volgens de algemene regel maar

ook ( en hier zit de grote truc) als we  $n+1 \Rightarrow n$  dan wordt  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot C_{n+1} \cdot x^n$

Vermits  $\frac{dy}{dx} = 3y$  volgt dat  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot C_{n+1} \cdot x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$ . Of nog  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot C_{n+1} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot C_n \cdot x^n$  en

hieruit volgt dat  $(n+1) \cdot C_{n+1} = 3 \cdot C_n$  voor alle  $n$  en dus  $C_{n+1} = \frac{3 \cdot C_n}{n+1}$  of nog  $C_{n+1} = \frac{3}{n+1} \cdot C_n$  Deze formule

is recursief en eens dat  $C_0$  bepaald is bekomen we voor  $n=0$   $C_1 = \frac{3}{1} \cdot C_0$

$$n=1 \quad C_2 = \frac{3}{2} \cdot C_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot C_0$$

$$n=2 \quad C_3 = \frac{3}{3} \cdot C_2 = \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot C_0$$

$$n=3 \quad C_4 = \frac{3}{4} \cdot C_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot C_0$$

Enz... of in het algemeen  $C_n = \frac{3^n}{n!} \cdot C_0$  en dus krijgen we

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = \frac{3^n}{n!} \cdot C_0 \cdot x^n = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 \cdot x)^n}{n!}$$

Noteer dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \frac{1}{n!}) = e$  en zo ook is  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!}$  en dus is

$$y = C_0 \cdot e^{3 \cdot x}$$

En dit is de oorzaak van het verschijnen van *e-machten* als oplossing van de differentieel vergelijkingen. De verdere bewijzen van tweede- en hogere orde lineaire differentieële vergelijkingen is praktisch in ieder fatsoenlijk wiskunde boek te vinden.

## 7.8 Het vinden van de constanten A en B uit de beginvoorwaarden

Men wenst dat op het ogenblik dat de switch ON is er geen stroom door de switch zou gaan. Dus op tijdstip 0

is  $i_c = I_{dc} - i_o$  en met  $i_c = 0$  bekomen we dat  $I_{dc} = -i_o$  en vullen we (1) hierin dan is

$$i_o = e^{\frac{-\omega \cdot A \cdot t}{2 \cdot Q_1}} \left[ A \cdot \cos \left( \omega \cdot A_1 \cdot t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}} \right) + I_{dc} \cdot B \cdot \sin \left( \omega \cdot A_1 \cdot t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}} \right) \right]$$

Noemen we, om de schrijfwijze wat te vereenvoudigen,  $\alpha = \frac{-A_1}{2 \cdot Q_1}$  en

$$A_1 \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}} = \beta 1 \text{ dan is}$$

$$i_o = I_{dc} e^{\alpha \cdot \omega \cdot t} [A \cdot \cos(\omega \cdot t \cdot \beta 1) + B \cdot \sin(\omega \cdot t \cdot \beta 1)] \quad (7.7.3a)$$

voor  $t = 0$ .

Nu is  $e^0 = 1$ ,  $\cos(0) = 1$  en  $\sin(0) = 0$  en

$$A = I_{dc} \quad (7.7.1)$$

Opdat we dit kunnen bereiken hebben we een fase verschuiving  $\varphi = 32,4816^\circ$  nodig. Dit betekent dat na een tijd  $\varphi$  uitgedrukt in radialen de stroom  $i_o = 0$  of vullen we dit in formule (7.7.3a) dan bekomen we dat  $0 = I_{dc} e^{\alpha \cdot \varphi} [A \cdot \cos(\varphi \cdot \beta 1) + B \cdot \sin(\varphi \cdot \beta 1)]$  en dit is mogelijk als  $A \cdot \cos(\varphi \cdot \beta 1) = -B \cdot \sin(\varphi \cdot \beta 1)$  en met  $A = 1$  volgt dat

$$B = -\cot g(\varphi \cdot \beta 1) \quad (7.7.2)$$

en onze vergelijking wordt voor de tijd dat de switch gesloten is

$$i_o = e^{\frac{-\varpi A_1 t}{2 \cdot Q_1}} \left[ I_{dc} \cdot \cos\left(\varpi \cdot A_1 t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}}\right) - I_{dc} \cdot \cot g(\varphi \cdot \beta 1) \cdot \sin\left(\varpi \cdot A_1 t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}}\right) \right] \quad (7.7.3)$$

en we weten uit driehoeksmetkunde dat  $A \cdot \cos(\alpha) + B \cdot \sin(\alpha) = C \cdot \sin(\alpha + \gamma)$  met hierin  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  en  $\gamma = \text{tg}^{-1}\left[\frac{A}{B}\right]$  dit toegepast bekomen we

$$C = \sqrt{I_{dc}^2 + \frac{I_{dc}^2 \cdot \cos(\varphi \cdot \beta 1)^2}{\sin(\varphi \cdot \beta 1)^2}} = \sqrt{\frac{I_{dc}^2 \cdot \sin(\varphi \cdot \beta 1)^2 + I_{dc}^2 \cdot \cos(\varphi \cdot \beta 1)^2}{\sin(\varphi \cdot \beta 1)^2}} = \frac{I_{dc}}{\sin(\varphi \cdot \beta 1)} = I_{o1}$$

$$\text{En } \gamma = \text{tg}^{-1}\left[\frac{-I_{o1} \cdot \sin(\varphi \cdot \beta 1)}{I_{o1} \cdot \cos(\varphi \cdot \beta 1)}\right] = -\varphi \cdot \beta 1$$

En de vergelijking wordt

$$i_o = e^{\frac{-\varpi A_1 t}{2 \cdot Q_1}} \cdot I_{o1} \cdot \sin\left[\varpi \cdot A_1 t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}} - \varphi \cdot \beta 1\right] \quad (7.7.4)$$

of op een eenvoudiger symbolische manier geschreven

$$i_o = e^{-\alpha \cdot t} \cdot I_{o1} \cdot \sin(\varpi \cdot \beta 1 \cdot (t - \varphi)) \quad (7.7.4a)$$

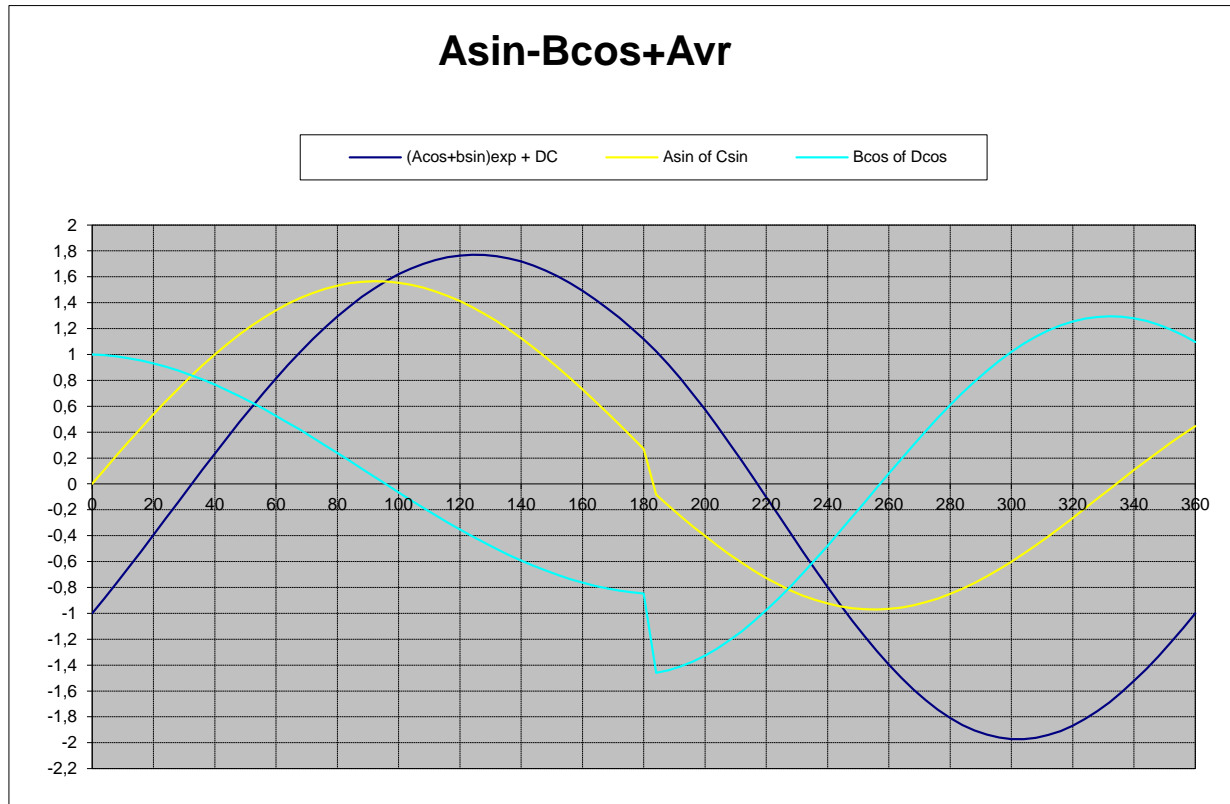
Belangrijke opmerking:

Hoewel formule (7.7.3) identiek is aan (7.7.4) kies ik voor de voorstelling van het signaal voor formule (7.7.4). Formule (7.7.3) is **wiskunde** terwijl formule (7.7.4) **elektronica** is, en duidelijk laat zien wat ik met een stroommeter kan meten. Het verschil is duidelijk te zien in **fig. 4**.

Hierin ziet men duidelijk de **wiskundige** sinus en cosinus curven die alleen op papier bestaan, en de **werkelijke** curve zoals ze op een oscilloscoop waar te nemen is, en in feite is deze laatste curve niets meer dan de som van de twee afzonderlijke curven (plus een fase verschuiving).

Deze figuur stelt het verloop voor niet alleen tussen 0 en  $\pi$ , maar ook tussen  $\pi$  en  $2\pi$  waarin men duidelijk een knik ziet op het ogenblik  $\pi$ , maar de som van beiden geeft geen enkele knik, zoals trouwens het in de werkelijkheid is.

Men moet dus steeds op zijn hoede zijn tussen een wiskundige benadering en een meetbare voorstelling. De wiskunde geeft wel een oplossing maar geen inzicht. En het is juist op dit punt dat vele studenten afhaken en de zin van de wiskunde niet meer snappen.



**fig. 4**

Op het ogenblik dat  $t = 0$  moet  $I_{dc} = i_o$  of (7.7.4) wordt:

$$I_{dc} = e^0 \cdot I_{o1} \cdot \sin[0 - \varphi \cdot \beta 1] = I_{o1} \cdot \sin(-\varphi \cdot \beta 1) \quad (7.7.5) \quad (1)$$

Op het ogenblik dat  $t = \pi$  is

$$i_{o\pi} = e^{\frac{-\pi \cdot A_1}{2 \cdot Q_1}} \cdot I_{o1} \cdot \sin \left[ A_1 \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}} (\pi - \varphi) \right] \quad (7.7.6)$$

Enkele bedenkingen. Als  $Q_1 \geq 5$  dan is  $\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q_1^2}} \geq 0.99498 \cong 1$  zodat de vorige formule wordt

$$i_{o\pi} = e^{\frac{-\pi \cdot A_1}{2 \cdot Q_1}} \cdot I_{o1} \cdot \sin[A_1(\pi - \varphi)]$$

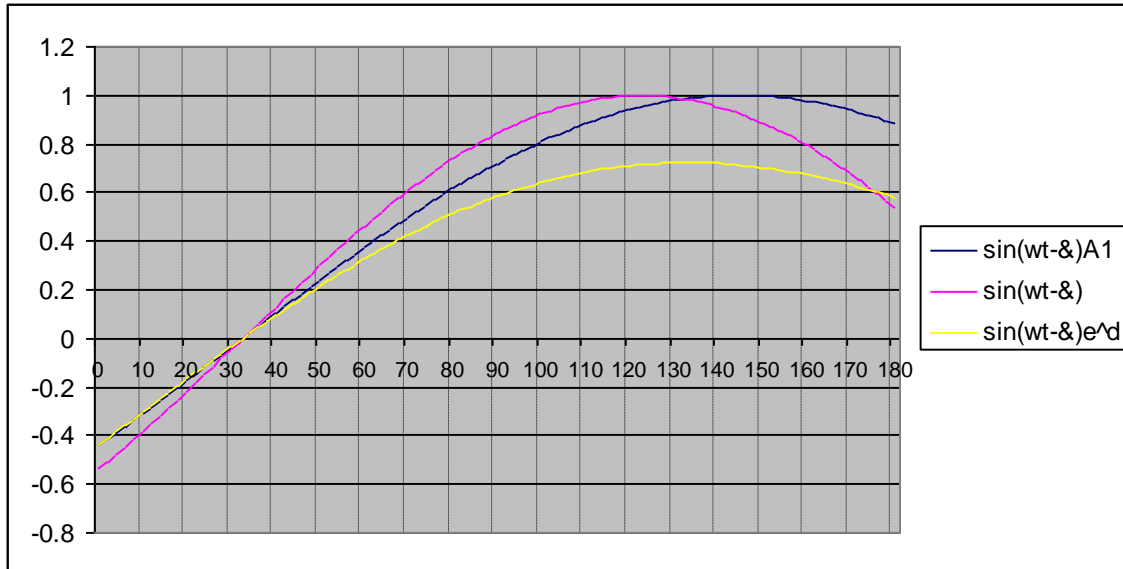
Als  $\varphi = 32.4816$  dan zal, vermits de schakeling niet resoneert op  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  maar wel op  $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1$  en vermits  $\varpi_1 = \varpi \cdot A1$  zal ook  $\sin(\omega \cdot t - \varphi)$  vervangen worden door  $\sin.A1(\omega \cdot t - \varphi) = \sin(\omega \cdot A1 \cdot t - \varphi \cdot A1)$  en

voor  $t = 0$  is de hoek  $\sin(-\varphi.A1)$  en hieruit volgt dat op tijd  $t = 0$

$$I_{o1} = I_{dc} \cdot \sin(-\varphi.A1) = -I_{dc} \cdot \sin(\varphi.A1)$$

Dit verschil is weergegeven in **fig. 5** voor  $A1=0.8001$  wat overeenkomt met een  $Q_1$  factor van 3.

Vermits  $I_{o1} = \frac{-I_{dc}}{\sin(\varphi.A1)}$  zijn in de vergelijking (7.7.4) alle componenten gekend behalve  $A_1$ .

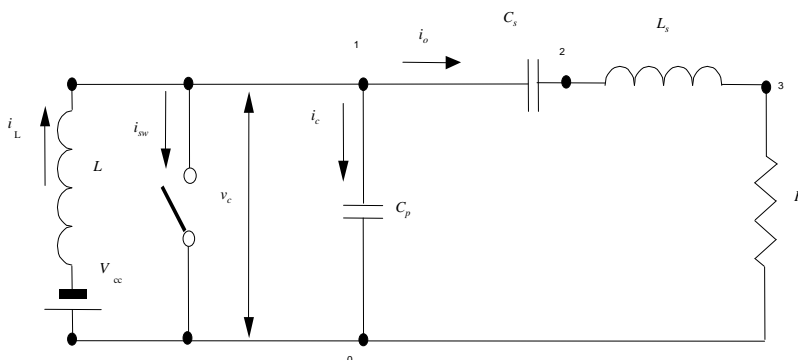


**fig. 5**

Eigenlijk om nog juister te zijn zou ook de invloed van de demping  $e^{\frac{-\sigma.t.A1}{2.Q1}}$  ook nog in rekening moeten gebracht worden, maar dit verschil ten opzichte van de amplitude met  $A1$  is miniem in de regio waar  $t = 0$ , zoals blijkt uit de **fig. 5**

En toch zal ik in het verder verloop van de berekeningen gebruik maken van de **wiskundige formules** zoals geformuleerd in ( 7.7.3a ) omdat blijkt dat deze algebraïsch eenvoudiger zijn om op te lossen dan de **elektronica** formule zoals weergegeven in ( 7.7.4a ).

## 7.9 Toestand als de switch OPEN is. Dit is de 'SWITCH is OFF'.



**fig. 6**

Passen we de wetten van Kirchoff toe dan zien we dat  $V_{Cp} = V_{Cs} + V_{Ls} + V_R$  maar volgens de definitie van de spanning over een capaciteit is  $V_{Cp} = \frac{1}{C_p} \int i_c \cdot dt$  en dus ook na differentiëren  $\frac{dV_{Cp}}{dt} \cdot C_p = i_c$

Nu is zoals hierboven reeds geschreven in formule (2)  $\frac{i_o}{C_s \cdot p} + L_s \cdot p \cdot i_o + R \cdot i_o = V_{Cp}$  (13). Noteer hier is de spanning over de serie schakeling van  $C, L, R$  niet gelijk aan  $0$ , maar wel gelijk aan  $V_{Cp}$ .

Zo ook kunnen we in de Laplace transformatie schrijven dat  $V_{Cp} = \frac{i_c}{C_p \cdot p}$  (14), en vermits in het knooppunt 1

$I_{dc} = i_c + i_o$  (15) volgt met (13)=(14), en inbreng van (15) dat

$$\frac{I_{dc} - i_o}{C_p \cdot p} = i_o \left( \frac{1}{C_s \cdot p} + L_s \cdot p + R \right) = \frac{I_{dc}}{C_p \cdot p} - \frac{i_o}{C_p \cdot p} = i_o \left( \frac{1}{C_s \cdot p} + L_s \cdot p + R \right) \text{ of nog}$$

$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot p} = i_o \left( \frac{1}{C_p \cdot p} + \frac{1}{C_s \cdot p} + L_s \cdot p + R \right)$  definiëren we  $\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_T}$  als de parallel capaciteit, en

vermenigvuldigen we beide kanten met  $p$  en brengen we  $L_s$  naar voren dan bekommen we

$$\frac{I_{dc}}{C_p} = L_s i_o \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} + p^2 + \frac{R}{L_s} p \right) \text{ en hieruit volgt naar een beetje rangschikken dat}$$

$$i_o \left( p^2 + \frac{R}{L_s} p + \frac{1}{C_T \cdot L_s} \right) = \frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s} \quad (7.8.1)$$

$$\text{of } i_o = \frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s \left( p^2 + \frac{R}{L_s} p + \frac{1}{C_T \cdot L_s} \right)}$$

De vergelijking (7.8.1) is vergelijkbaar met vergelijking (7.6.2). Vermits  $\frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s} = Cst$  en dus is (7.8.1) van de

vorm  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = c$  en volgens de algemene regels voor het oplossen van lineaire differentieelvergelijkingen van de hogere orde is deze op te splitsen in twee afzonderlijke vergelijkingen namelijk de **homogene oplossing**  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = 0$  en de **niet homogene oplossing**  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = c$  en de **algemene oplossing** is dan de **homogene oplossing + niet homogene oplossing**

### 7.9.1 De homogene oplossing



Deze is bijna juist hetzelfde als voor de toestand als de switch gesloten is, behalve dat  $C_s \Rightarrow C_T$  en dus

worden  $\alpha = \frac{R}{2.L_s}$  en  $\beta 2 = \sqrt{\frac{1}{L_s.C_T} - \left(\frac{R}{2.L_s}\right)^2}$  noteer dat  $\alpha = \frac{R}{2.L_s} = \frac{A_1}{2.Q_1}$  zoals hierboven maar dat

$$\frac{1}{L_s.C_T} = \omega_2^2 = \frac{\omega_2^2 \cdot \omega^2}{\omega^2} = \omega^2 \cdot A_2^2 \text{ zodat } \beta 2 = \sqrt{\omega^2 \cdot A_2^2 - \left(\frac{\omega \cdot A_1}{2.Q_1}\right)^2} = \omega \cdot A_2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{2.Q_1 \cdot A_2}\right)^2}$$

Zodat de algemene homogene oplossing wordt

$$i_o = e^{\frac{-\omega A_1 t}{2.Q_1}} \left[ C \cdot \cos \left( \omega \cdot A_2 \cdot t \sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{2.Q_1 \cdot A_2}\right)^2} \right) + D \cdot \sin \left( \omega \cdot A_2 \cdot t \sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{2.Q_1 \cdot A_2}\right)^2} \right) \right] \quad (7.8.2)$$

of op een eenvoudiger symbolische wijze geschreven

$$i_o = e^{-\alpha \cdot \omega t} [C \cdot \cos(\omega \cdot \beta 2 \cdot t) + D \cdot \sin(\omega \cdot \beta 2 \cdot t)] \quad (7.8.2a)$$

## 7.9.2 De niet homogene oplossing

We moeten dus een oplossing vinden voor  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = c$ . In de boeken over wiskunde zijn er verschillende manieren besproken om dit op te lossen maar een van de eenvoudigste is deze: We kunnen de vergelijking  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = c$  ook schrijven als  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = c$  Veronderstel dat de oplossing van de vergelijking  $a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = c$  van de vorm is  $y = at^2 + bt + c$ , wat aannemelijk is vermits het

over een tweede orde vergelijking gaat, dan is  $\frac{dy}{dt} = 2.at + b$  en  $\frac{d^2.y}{dt^2} = 2.a$ . Vullen we dat in (7.8.1) dan

$$\text{bekomen we } \left( p^2 + \frac{R}{L_s} p + \frac{1}{C_T \cdot L_s} \right) = \frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s} = \left( 2.a + \frac{R}{L_s} (2.at + b) + \frac{1}{C_T \cdot L_s} \cdot (at^2 + bt + c) \right)$$

Gerangschikt naar  $t$  bekomen we

$$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s} = \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} \cdot at^2 + \left( \frac{2.a.R}{L_s} + \frac{b}{C_T \cdot L_s} \right) t + \left( 2.a + \frac{R}{L_s} b + \frac{1}{C_T \cdot L_s} \cdot c \right) \right) \text{ Hieruit volgt dat term bij term}$$

$$\left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} \cdot a \right) = 0, \text{ dus } a = 0, \left( \frac{2.a.R}{L_s} + \frac{b}{C_T \cdot L_s} \right) = 0 \text{ en met } a = 0, \text{ volgt ook } b = 0,$$

$$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s} = \left( 2.a + \frac{R}{L_s} b + \frac{1}{C_T \cdot L_s} \cdot c \right) \text{ ofwel } \frac{I_{dc}}{C_p \cdot L_s} = \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} \cdot c \right) \text{ en } \frac{I_{dc} \cdot C_T}{C_p} = c \quad (7.8.3)$$

We weten dat  $\omega_1^2 = \frac{1}{L_s \cdot C_s}$  en  $\omega_2^2 = \frac{1}{L_s \cdot C_T} = \frac{C_s + C_p}{L_s \cdot C_s \cdot C_p}$  daaruit volgt dat  $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{C_s}{C_s + C_p}$  en ook

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = 1 - \frac{C_s}{C_s + C_p} = \frac{C_s + C_p - C_s}{C_s + C_p} = \frac{C_p}{C_s + C_p} \quad (7.8.4)$$

Maar zo is ook  $\frac{C_T}{C_s} = \frac{\frac{C_s \cdot C_p}{C_s + C_p}}{C_s} = \frac{C_p}{C_s + C_p}$  (7.8.5). Uit (7.8.4) en (7.8.5) volgt dat

$1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{C_T}{C_s} = 1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{C_T}{C_s}$  en uiteindelijk bekomen we dat (7.8.3) wordt

$$c = I_{dc} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]. \quad (7.8.6)$$

Noteer dat c is een stroom.

### 7.9.3 De homogene oplossing + de niet homogene oplossing

De totale oplossing van de differentiële vergelijking gedurende de tijd dat de switch open is, is de som van de **homogene oplossing+ niet homogene oplossing** en dus gelijk aan (15) + (19)

ofwel

$$i_o = e^{\frac{-\omega \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot Q_1}} \left[ C \cdot \cos \left( \omega \cdot A_2 \cdot t \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2 \cdot Q_1 \cdot A_2} \right)^2} \right) + D \cdot \sin \left( \omega \cdot A_2 \cdot t \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2 \cdot Q_1 \cdot A_2} \right)^2} \right) \right] - I_{dc} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \quad (7.8.7)$$

### 7.10 Het vinden van de constanten C en D uit de beginvoorwaarden

Voor het vereenvoudigen van de schrijfwijze kunnen we de niet veranderlijke waarden een symbolische waarde geven zoals  $\alpha = \frac{A_1}{2 \cdot Q_1}$ ,  $\beta = A_2 \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2 \cdot Q_1 \cdot A_2} \right)^2}$  en  $\gamma = \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$  zodat de vorige formule wordt

$$i_o = e^{-\omega \cdot \alpha \cdot t} [C \cdot \cos(\omega \cdot t \cdot \beta 2) + D \cdot \sin(\omega \cdot t \cdot \beta 2)] + I_{dc} \cdot \gamma. \quad (7.9.1)$$

Ook hier ziet men dat men deze formule ook kan schrijven als

$$i_o = e^{-\alpha \cdot t} [I_{o2} \cdot \sin(\omega \cdot t \cdot \beta + \psi)] + I_{dc} \cdot \gamma \text{ waarin } I_{o2} = \sqrt{C^2 + D^2} \text{ en } \psi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{C}{D} \right) \quad (7.9.1)$$

Of volledig neergeschreven met invulling van  $\alpha, \beta, \gamma$

$$i_o = e^{\frac{-\varpi \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot Q_1}} \left[ I_{o2} \cdot \sin \left( \varpi \cdot A_2 \cdot t \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2 \cdot Q_1 \cdot A_2} \right)^2} + \psi \right) \right] + I_{dc} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \quad (7.9.2)$$

Vermits we C en D niet kennen weten we ook niet of  $\psi$  een negatieve of positieve hoek is, maar vermoedelijk, vermits  $\varphi$  een negatieve hoek is zal ook  $\psi$  een negatieve hoek worden.

Er moet natuurlijke voortvloeiing zijn van het signaal bij de overgang tussen de switch die gesloten was en de switch die zich opent, dit is dus op het tijdstip  $t = \pi$  [radialen] = 180°

Maar ook op het tijdstip  $t = 2 \cdot \pi$  [rad.] = 360° moet er een vloeiende overgang zijn.

Men moet echter in acht nemen dat t van 0 tot  $2 \cdot \pi$ , dit wil zeggen voor de tijd dat de switch is 'ON' gaat de tijd t van 0 tot  $\pi$ , maar gedurende de tijd dat **de switch is 'OFF'** gaat de tijd van  $\pi$  tot  $2 \cdot \pi$ . Er moet dus  $\pi$  afgetrokken worden indien we de beide tijds intervallen naast elkaar behandelen of met andere woorden gedurende de **switch 'OFF'** periode is de tijd ( $t - \pi$ )

### Zeer belangrijke opmerking.

Willen we vergelijkingen opstellen die zowel van toepassing zijn als de switch gesloten is als gedurende de switch open is dan moeten we er rekening mee houden dat als  $\omega t = 0$  op het tijdstip dat de switch gesloten is dan is na een halve periode  $\omega t = \pi$ . Vanaf dat ogenblik begint de tijd te lopen voor de halve periode dat de switch open is. Dus de tijd dat de switch open is, is dus  $\omega(t - \pi) = \omega t$ . We moeten dus in al onze formules tussen  $\pi$  en  $2 \cdot \pi$  de tijd  $\omega t$  vervangen door  $\omega(t - \pi)$

Dit gezegd zijnde kunnen we verder.

Op het tijdstip  $t = \pi$  is  $i_{o1} = i_{o2}$

En volgens en dit ingevuld geeft voor  $i_{o1}$  in vgl. (7.7.4)

$$i_{o2} = e^{-\omega \cdot \alpha \cdot t} [C \cdot \cos(\varpi \cdot t \cdot \beta 2) + D \cdot \sin(\varpi \cdot t \cdot \beta 2)] + I_{dc} \cdot \gamma$$

$$i_{o2} = e^{-\omega(\pi - \pi) \cdot \alpha} [C \cdot \cos(\varpi \cdot (\pi - \pi) \cdot \beta 2) + D \cdot \sin(\varpi \cdot (\pi - \pi) \cdot \beta 2)] + I_{dc} \cdot \gamma$$

$$i_{o2} = e^0 [C \cdot \cos(0) + D \cdot \sin(0)] + I_{dc} \cdot \gamma = C + I_{dc} \cdot \gamma$$

en op dat ogenblik is volgens (7.7.3a)  $i_o = I_{dc} e^{\alpha \cdot \omega \cdot t} [A \cdot \cos(\varpi \cdot t \cdot \beta 1) + B \cdot \sin(\varpi \cdot t \cdot \beta 1)]$  of

$$i_{o1} = I_{dc} e^{\alpha \cdot \pi} [A \cdot \cos(\pi \cdot \beta 1) + B \cdot \sin(\pi \cdot \beta 1)]$$

en met  $i_{o1} = i_{o2}$  volgt dat  $C + I_{dc} \cdot \gamma = I_{dc} e^{\alpha \cdot \pi} [A \cdot \cos(\pi \cdot \beta 1) + B \cdot \sin(\pi \cdot \beta 1)]$

Vullen we terug  $\gamma = I_{dc} \cdot \left( 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right)$  dan bekomen we dat

$$C = I_{dc} \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - e^{\alpha \cdot \pi} [A \cdot \cos(\pi \cdot \beta 1) + B \cdot \sin(\pi \cdot \beta 1)] \quad (7.9.6)$$

Hierin ziet men dat C volledig bepaald is door twee onbekende parameters namelijk  $A_1, A_2$

Op een gelijkaardige manier kunnen we een vergelijking opstellen op het ogenblik dat  $t = 2 \cdot \pi$   $t = 0$

Beginnen we met het eenvoudigste. Ik weet immers dat het signaal na  $t = 2 \cdot \pi$  moet gelijk zijn aan  $t = 0$  en op tijdstip  $t = 0$  is  $i_o = I_{dc}$  of (20b) wordt

$$I_{dc} = e^{\frac{-\pi.A_1}{2.Q_1}} \left[ I_{o2} \cdot \sin \left( \pi.A_2 \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2.Q_1.A_2} \right)^2} + \psi \right) \right] + I_{dc} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \text{ ofwel}$$

$$I_{dc} = e^{\frac{-\pi.A_1}{2.Q_1}} \left[ I_{o2} \cdot \sin \left( \pi.A_2 \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2.Q_1.A_2} \right)^2} + \psi \right) \right] \cdot \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \quad (7.9.3)$$

$I_{dc} = e^{-\alpha.2\pi} [I_{o2} \cdot \sin(\pi.\beta2 + \psi)] + I_{dc} \cdot \gamma$  of uitgewerkt met in achtneming dat  $\gamma = \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$  bekomen

we dat

$$\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = e^{-\alpha.2\pi} [I_{o2} \cdot \sin(\pi.\beta2 + \psi)] \quad (7.9.4)$$

Deze uitdrukking kan ook nog anders geschreven worden namelijk als

$$\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = e^{-\alpha.2\pi} [C \cdot \cos(\pi.\beta2) - D \cdot \sin(\pi.\beta2)]$$

en hieruit halen we dat

$$D = \frac{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 / e^{-\alpha.2\pi} - C \cdot \sin(\pi.\beta2)}{\sin(\pi.\beta2)} \quad (7.9.5)$$

Noteer dat  $D$  alleen een functie is van de variabelen  $A_1, A_2$  op voorwaarde dat ook  $C$  alleen maar afhankelijk is van  $A_1, A_2$ .

Eigenaardig genoeg bekomen we dezelfde uitdrukking is als we  $\frac{d.V_p}{V_{cc}} = 0$  stellen.

Zover zijn we met de volgende opmerkingen:

We hadden dezelfde oplossing kunnen vinden met de Laplace transformatie.

Het voordeel van de Laplace transformatie is dat we de constanten  $A, B, C, D$  niet moeten zoeken uit

de begin voorwaarden, maar we moeten dan wel de initiële spanning over  $C_s$  en de initiële stroom door  $L_s$  kennen, en een geschikte uitdrukking vinden om de Inverse Laplace transformatie uit te voeren. Soms is de Laplace transformatie eenvoudiger, maar minder dicht tegen wat er afspeelt in de schakeling, laat we zeggen puur wiskundig. Daarom mijn voorkeur voor deze aanpak.

Men ziet dat het signaal verzwakt volgens een e-macht, omgekeerd evenredig met de kwaliteitsfactor

$Q_L = \frac{Q_1}{A_1}$ , maar ook de resonantie frequentie niet resoneert op  $\omega.A_1$  of  $\omega.A_2$  maar wel op

$\left( \varpi.A_1 \sqrt{1 - \frac{1}{4.Q_1^2}} \right)$  en  $\varpi.A_2 \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2.Q_1.A_2} \right)^2}$ . Het verschil is niet groot maar toch zichtbaar voornamelijk

als  $Q_L < 5$  wordt. Dit subtiel verschil hebben we niet in rekening gebracht bij de definitie van  $\omega_1, \omega_2$ .

$I_{o1}$  en  $\gamma$  vinden is hetzelfde als  $A$  en  $B$  vinden immers  $I_{o1} = \sqrt{A^2 + B^2}$  en  $\gamma = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{A}{B} \right]$  zo ook is  $I_{o1}$  en  $\psi$  vinden is hetzelfde als  $C$  en  $D$  vinden immers  $I_{o2} = \sqrt{C^2 + D^2}$  en  $\gamma = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{C}{D} \right]$

Maar tot hertoe hebben we maar alleen met de initiële voorwaarden de waarden van  $A, B, C, D$  gevonden in functie van de twee (eigenlijk drie) onbekenden namelijk  $A_1, A_2$  ( maar ook  $R$  ). Daarom moeten we dus nog 2 (eigenlijk 3 )onafhankelijke vergelijkingen bij vinden.

Deze onafhankelijke vergelijkingen zijn:

1) Opdat de schakeling goed zou functioneren moet  $V_{cp} = 0$  op het einde van de periode dat de 'switch is OFF' zodat er geen stroom zou vloeien door de switch als deze zich sluit.

2) Indien we een schakeling willen maken met een rendement van 100% dan moet het geleverde vermogen aan de antenne gelijk zijn aan het vermogen, gemiddeld genomen over een periode, dat geleverd wordt door de voedingsbron. Vermits de voedingsbron een constante voeding is namelijk  $V_{cc}$  zal dus  $I_{dc} = \frac{1}{2.\pi} \int i_o$  .

We zullen zien dat deze twee vergelijkingen alleen afhankelijk zijn van  $A_1, A_2$

3) De enige spanning die er opgeladen wordt gedurende een volledige periode is de spanning over  $V_{cp}$  , en deze spanning wordt dan gefilterd door een serieschakeling van  $C_s L_s R$  zodat voornamelijk nog maar alleen de 1<sup>ste</sup> harmonische over de belasting  $R$  komt te staan. Indien we streven naar een rendement van 100% zal het gemiddelde over  $V_{cp}$  gelijk moeten zijn aan  $V_{cc}$  . Anders uitgedrukt  $V_{cc} = \frac{1}{2.\pi} \int V_{cp}$  .We zullen zien dat deze vergelijking alleen afhankelijk is van  $A_1, A_2$  en  $R$  . Maar vermits we uit de twee vorige vergelijkingen  $A_1, A_2$  kunnen bepalen, kunnen we met deze derde vergelijking  $R$  bepalen, en is ons vraagstuk analytisch met differentieel vergelijkingen opgelost.

## 7.11 Berekenen van $V_{cp}$

Volgens de definitie is  $V_{cp} = \frac{1}{C_p} \int i_c$  met  $i_c = I_{dc} - i_o$  vullen we hier de gevonden waarde van  $i_o$  in dan bekomen we

$$V_{cp} = \frac{1}{C_p} \left[ \int I_{dc} dt - \int e^{-\alpha.t} (C.\cos(\omega.t.\beta_2) + D.\sin(\omega.t.\beta_2)) dt - \int (I_{dc}.\gamma) dt \right] \quad (.7.10.1)$$

vermits deze integraal een functie is van de tijd  $t$  maar we werken hier voor het merendeel met de tijd uitgedrukt in  $\omega.t$  kunnen we de integraal ook integreren met  $\frac{d(\omega.t)}{\omega}$  en als dusdanig  $\frac{1}{\omega}$  vooraan brengen.

In deze vergelijking kunnen we ook formule (7.4.3)  $C_p = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot Q_L \cdot (A_2^2 - A_1^2)}$  inbrengen en ook

$$\gamma = \left( 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right) \text{ zodoende bekomen we}$$

$$V_{cp} = \omega \cdot R \cdot Q_L \cdot (A_2^2 - A_1^2) \left[ \int I_{dc} \cdot \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 d(\omega t) - \int e^{-\alpha \cdot \omega t} (C \cdot \cos(\omega t \cdot \beta 2)) - \int e^{-\alpha \cdot \omega t} D \cdot \sin(\omega t \cdot \beta 2) dt \right]$$

Deze integraal kunnen we dus opdelen in drie afzonderlijke integralen welke we afzonderlijk gaan integreren plus een constante factor die we gaan bepalen uit de beginvoorwaarden.

$$I) \int I_{dc} \cdot \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 d(\omega t) = I_{dc} \cdot \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot \omega t + cst$$

$$II) \int e^{-\alpha \cdot \omega t} (C \cdot \cos(\omega t \cdot \beta 2)) d(\omega t) = \frac{e^{-\alpha \cdot \omega t}}{\alpha^2 + \beta 2^2} \cdot [C(-\alpha) \cos(\beta 2 \cdot \omega t) + C \cdot \beta 2 \cdot \sin(\beta 2 \cdot \omega t)] + cst$$

$$III) \int e^{-\alpha \cdot \omega t} (D \cdot \sin(\omega t \cdot \beta 2)) d(\omega t) = \frac{e^{-\alpha \cdot \omega t}}{\alpha^2 + \beta 2^2} \cdot [D(-\alpha) \sin(\beta 2 \cdot \omega t) - D \cdot \beta 2 \cdot \cos(\beta 2 \cdot \omega t)] + cst$$

Vullen we eerst  $\alpha^2 + \beta 2^2 = \left( \frac{A_1}{2 \cdot Q_1} \right)^2 + \left[ A_2 \sqrt{1 - \left( \frac{A_1}{2 \cdot Q_1 \cdot A_2} \right)^2} \right]^2 = A_2^2$  in en voegen we II en III samen dan

bekomen we dat

$$II + III = \frac{e^{-\alpha \cdot \omega t}}{A_2^2} \cdot [C(-\alpha) \cos(\beta 2 \cdot \omega t) + C \cdot \beta 2 \cdot \sin(\beta 2 \cdot \omega t)] + [D(-\alpha) \sin(\beta 2 \cdot \omega t) - D \cdot \beta 2 \cdot \cos(\beta 2 \cdot \omega t)] + cst$$

$$II + III = \frac{e^{-\alpha \cdot \omega t}}{A_2^2} \cdot [C(-\alpha) \cos(\beta 2 \cdot \omega t) - D \cdot \beta 2 \cdot \cos(\beta 2 \cdot \omega t)] + [C \cdot \beta 2 \cdot \sin(\beta 2 \cdot \omega t) + D(-\alpha) \sin(\beta 2 \cdot \omega t)] + cst$$

$$II + III = \frac{e^{-\alpha \cdot \omega t}}{A_2^2} \cdot [(C(-\alpha) - D \cdot \beta 2) \cos(\beta 2 \cdot \omega t)] + [(C \cdot \beta 2 + D(-\alpha)) \sin(\beta 2 \cdot \omega t)] + cst$$

$$II + III = \frac{e^{-\alpha \cdot \omega t}}{A_2^2} \cdot [E \cos(\beta 2 \cdot \omega t)] + [F \cdot \sin(\beta 2 \cdot \omega t)] + cst$$

Hierin is

$$E = (C(-\alpha) - D.\beta 2) \text{ en } F = (C(\beta 2) + D.(-\alpha)) \quad (7.10.2)$$

en alles te samen wordt dan

$$V_{cp} = \omega.R.Q_L.(A_2^2 - A_1^2) \left[ I_{dc} \cdot \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot \omega.t - \frac{e^{-\alpha.\omega.t}}{A_2^2} \cdot [E.\cos(\beta 2.\omega.t) + F.\sin(\beta 2.\omega.t)] + CST \right]$$

$$V_{cp} = \frac{\omega.R.Q_L.A_1^2.(A_2^2 - A_1^2)}{A_2^2} \left[ I_{dc} \cdot \omega.t - \frac{e^{-\alpha.\omega.t}}{A_1^2} \cdot [E.\cos(\beta 2.\omega.t) + F.\sin(\beta 2.\omega.t)] + CST \right]$$

Met de beginvoorwaarde dat  $V_{cp} = 0$  ook op tijdstip  $\omega.t = 0$  vinden we dat  $CST = -E$

En uiteindelijk bekomen we dus dat

$$V_{cp} = \frac{\omega.R.Q_L.A_1^2.(A_2^2 - A_1^2)}{A_2^2} \left[ I_{dc} \cdot \omega.t - \frac{e^{-\alpha.\omega.t}}{A_1^2} \cdot [E.\cos(\beta 2.\omega.t) + F.\sin(\beta 2.\omega.t)] - E \right] \quad (7.10.3)$$

Dit is dus de functie die het verloop geeft van de spanning over  $C_p$  in functie van  $\omega.t$  over een halve periode.

Nu moet deze functie gelijk zijn aan 0 na een periode  $\omega.t = \pi$  en vullen we dat in dan krijgen we

$$0 = \left[ [E.\cos(\beta 2.\pi) + F.\sin(\beta 2.\pi)] + E \right] \quad (7.10.4)$$

Deze vergelijking is een onafhankelijke vergelijking en alleen afhankelijk van  $A_1, A_2$  en de gekende parameters  $Q_L$  en  $\omega$ . En hiermee hebben we dus aan de eerste voorwaarde voldaan.

Nu weten we uit driehoeksmetkunde dat  $A.\cos(\psi).\cos(\beta 2.\omega.t) + A.\sin(\psi).\sin(\beta 2.\omega.t) = A.\cos(\beta 2.\omega.t - \psi)$ , en dus wanneer  $E = A.\cos(\psi)$  en  $F = A.\sin(\psi)$  dan is  $E^2 + F^2 = A^2.\cos^2(\psi) + A^2.\sin^2(\psi)$  of  $A = \sqrt{E^2 + F^2}$  en  $tg(\psi) = \frac{A.\sin(\psi)}{A.\cos(\psi)} = \frac{F}{E}$  of  $\psi = tg^{-1}\left(\frac{F}{E}\right)$

En onze formule (7.10.3) wordt

$$V_{cp} = \frac{\omega.R.Q_L.A_1^2.(A_2^2 - A_1^2)}{A_2^2} \left[ I_{dc} \cdot \omega.t - \frac{e^{-\alpha.\omega.t}}{A_1^2} \cdot [A.\cos(\beta 2.\omega.t - \psi)] - A.\cos(\psi) \right] \quad (7.10.5)$$

We kunnen de vergelijking (7.10.5) ook weer bekijken als zijnde opgebouwd uit 4 afzonderlijke stukken namelijk:

Een constante  $\frac{\omega.R.Q_1.(A_2^2 - A_1^2)}{\omega.A_1}$  die in feite een andere vorm is van  $\frac{1}{C_p.\omega}$

Een  $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 . I_{dc} . \omega . t$  die dus een lineaire lijn vormt in functie van de tijd, en aanduidt het gedeelte van de stroom uit de voeding die de parallelle capaciteit oplaadt.

$$e^{\frac{-\omega . A_1 . t}{2 . Q_1}} . \frac{I_{o2}}{A_2} . \cos\left(\omega . A_2 . t \sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{2 . Q_1 . A_2}\right)^2} - \psi\right)$$

een gedempte cosinus signaal met een fase verschuiving

Een constante waarde  $\frac{I_{o2}}{A_2} . \cos(\psi)$

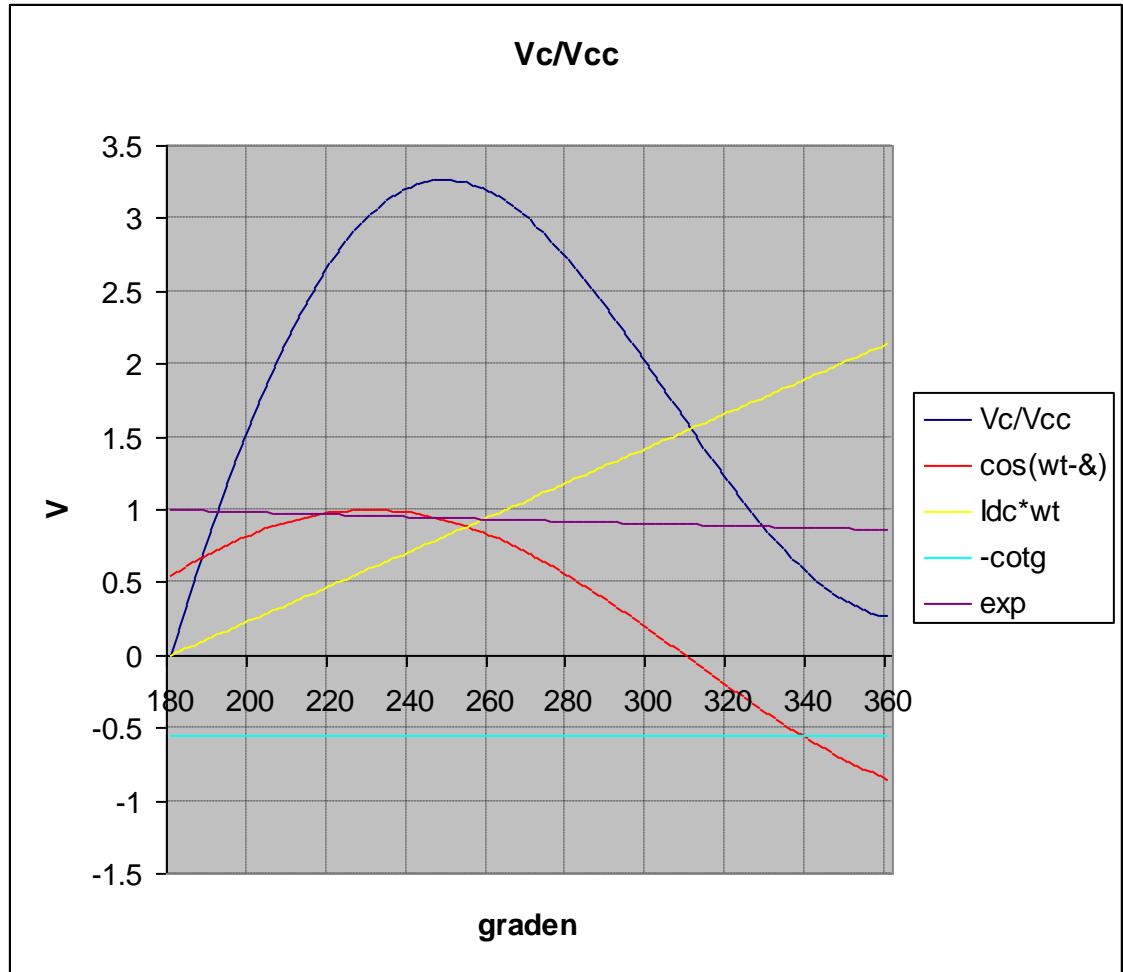
Die in feite dezelfde fase verschuiving is.

Dit alles is dus een nauwkeuriger benadering van het verloop van  $V_{cp}$  ten opzichte van de benaderende formule die we toegepast hebben in het hoofdstuk over de algebraïsche benadering.

Dit alles is (vooraleer we eigenlijk de verschillende onbekenden gekend zijn) reeds weergegeven in de volgende figuren **fig. 7, fig. 8, fig. 9**.

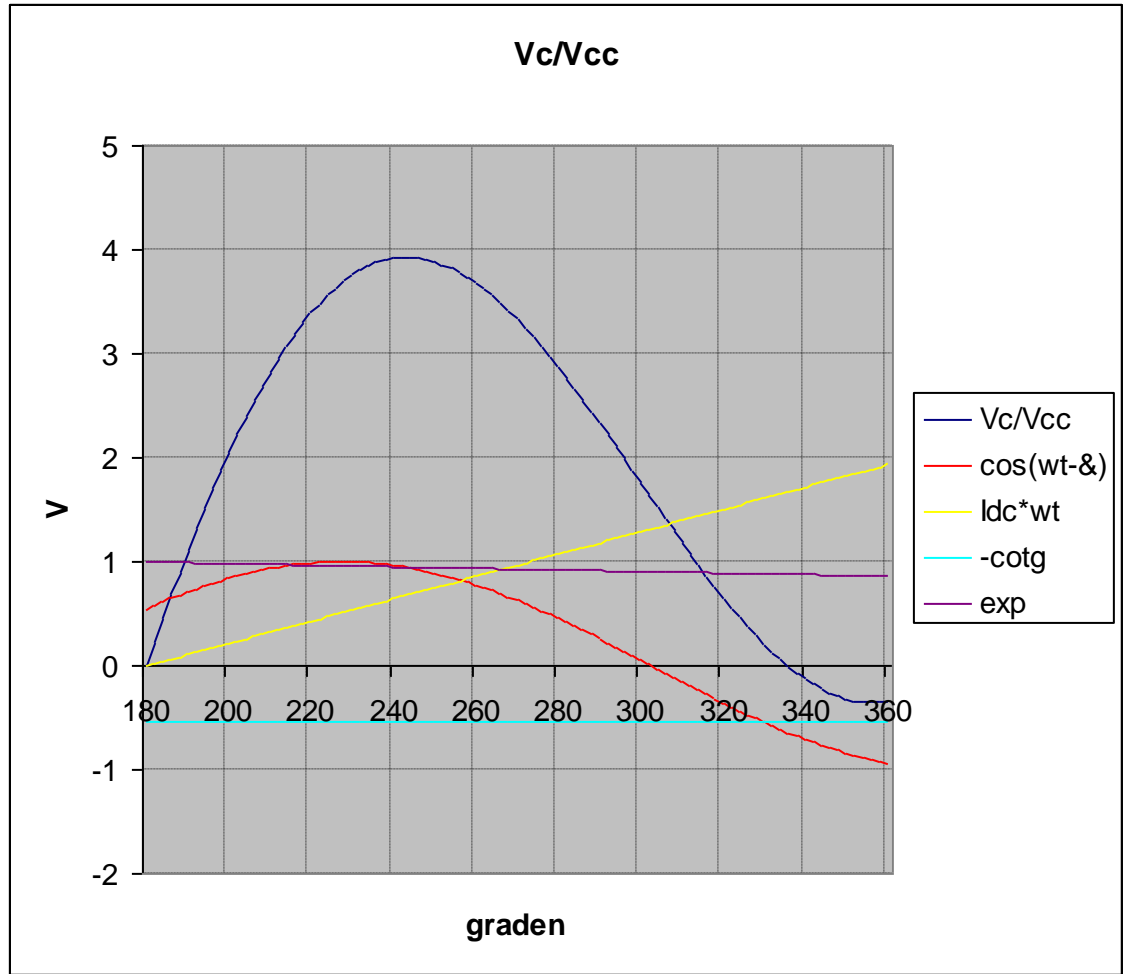
Hierin is ook reeds aangetoond wat er gebeurt indien de parallelle capaciteit niet juist is uitgerekend. Er verschijnt dan een restspanning, positief of negatief, die doordat daarna de switch gesloten wordt, wordt kortgesloten, wat te allen tijde moet vermeden worden. Immers dit veroorzaakt een grote kortsluitstroom in de switch (de FET Transistor). Alleen wanneer de capaciteit precies 0 volt bedraagt zal de switch in geleiding kunnen komen zonder stroom te snijden.





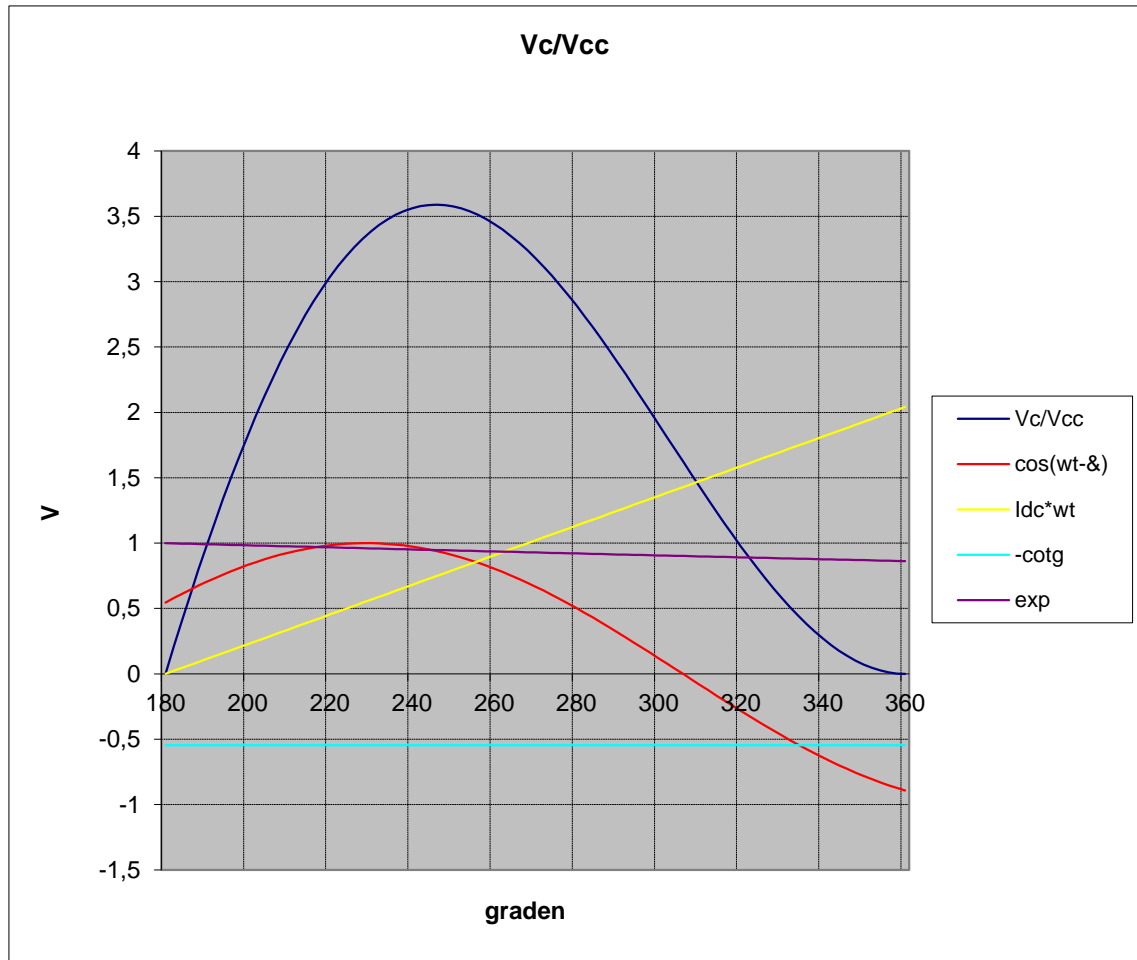
A2=1.14

fig. 7



A2=1.18

fig. 8



A2=1.168

fig. 9

## 7.12 De laatste vergelijking met $I_{dc}$ in functie van $i_o$

Wanneer we er naar streven een zender te maken die een rendement van 100% haalt dan moet al de gelijkstroom uit de bron, namelijk  $I_{dc}$  over een ganse periode gelijk zijn aan de gemiddelde stroom  $i_c + i_s$  of met andere woorden

$$I_{dc} = \frac{1}{\pi} \int i_c + \frac{1}{\pi} \int i_s = \frac{1}{2\pi} \int I_{dc} - i_o \text{ en vermits we de uitdrukking van } i_{o1} \text{ en } i_{o2} \text{ kennen zouden we ook}$$

hiermee analytisch de integralen kunnen uitrekenen. Maar er bestaat een veel eenvoudiger methode, namelijk numeriek integreren, zoals reeds uitgelegd in hoofdstuk 6.

Toegepast verdelen we de tijd tussen  $0 \Rightarrow 2\pi$  in  $360/4$  delen, dus iedere tijds indeling is gelijk aan  $4^\circ$ . Dit is voldoende nauwkeurig om de trapezium regel hierop toe te passen.

We berekenen voor iedere opeenvolgende 4 graden de stroom  $I_{dc} - i_o$  met de formules (7.7.4) voor de periode tussen  $0 \Rightarrow \pi$  en de formule (7.9.2) voor de periode tussen  $\pi \Rightarrow 2\pi$ . En we berekenen eenvoudig het gemiddelde van de totale stroom. Nu is de voorwaarde is dat na een periode van  $\omega.t = 2\pi$  deze gemiddelde stroom gelijk is aan de gelijkstroom uit de voedingsbron.

Noteer dat  $\frac{i_c}{I_{dc}} = \frac{I_{dc}}{I_{dc}} - \frac{i_o}{I_{dc}} = 1 - \frac{i_o}{I_{dc}}$  en de trapeziumregel wordt

$$\frac{i_{gem}}{I_{dc}} = \frac{i_{gem(n-1)}}{I_{dc}} + \frac{4}{2 \cdot \pi} \left( \frac{1 - i_{o(n-1)} + 1 - i_{o(n)}}{2 \cdot I_{dc}} \right) = \frac{i_{gem(n-1)}}{I_{dc}} + \frac{1}{\pi} \left( 2 - \frac{i_{o(n-1)}}{I_{dc}} - \frac{i_{o(n)}}{I_{dc}} \right) \Rightarrow 1$$

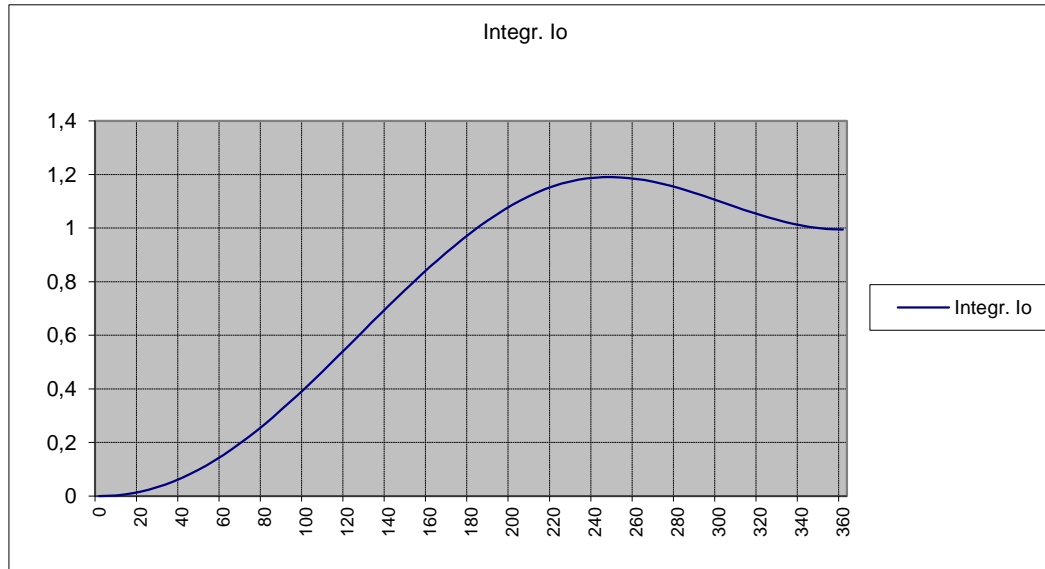


fig. 10

Een voorstelling van zo een integraal ziet er uit zoals in fig. 10.

Nu dat we de 2 onafhankelijke vergelijkingen gevonden hebben kunnen we deze met een EXEL programma alle 2 laten zien. We kunnen dat laten zien door alle 2 vergelijkingen naast elkaar te laten evalueren van  $0 \Rightarrow 2\pi$  of  $360^\circ$  in stappen van  $4^\circ$ . Een voorbeeld hiervan is hierbij getoond, en op deze EXEL bladzijde wordt het tool SOLVER gebruikt, met de volgende parameters ingetoetst.

### 7.13 Het gemiddelde van $V_{cp}$ moet gelijk zijn aan $V_{cc}$

De enige spanning die er opgeladen wordt gedurende een volledige periode is de spanning over  $V_{cp}$ , en deze spanning wordt dan gefilterd door een serieschakeling van  $C_s L_s R$  zodat voornamelijk nog maar alleen de 1<sup>ste</sup> harmonische over de belasting  $R$  komt te staan, maar ook nog andere harmonischen. Maar de integraal van

$$V_{cp} \text{ moet gelijk zijn aan } V_{cc}. \text{ Anders uitgedrukt: } V_{cc} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int V_{cp} \text{ of } \frac{V_{cc}}{V_{cc}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{V_{cp}}{V_{cc}} \text{ of } 1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{V_{cp}}{V_{cc}}$$

dit is weergegeven in fig. 11.

Noteer dat vermits  $V_{cp} = 0$  gedurende de periode tussen  $0$  en  $\pi$  is de curve weergegeven vanaf  $\pi$  tot  $2\pi$ .

Nu geeft formule ( 7.10.3 ) ons een uitdrukking van  $V_{cp}$  in functie van alle tot hertoe opgeloste variabelen, behalve  $R$ .

Op analoge manier als we gedaan hebben met  $i_c$  kunnen we dit numeriek oplossen en beschouwen  $R$  als een variabele parameter.

Op deze manier wordt dan de allerlaatste onbekende opgelost, en kunnen de componenten berekend worden.

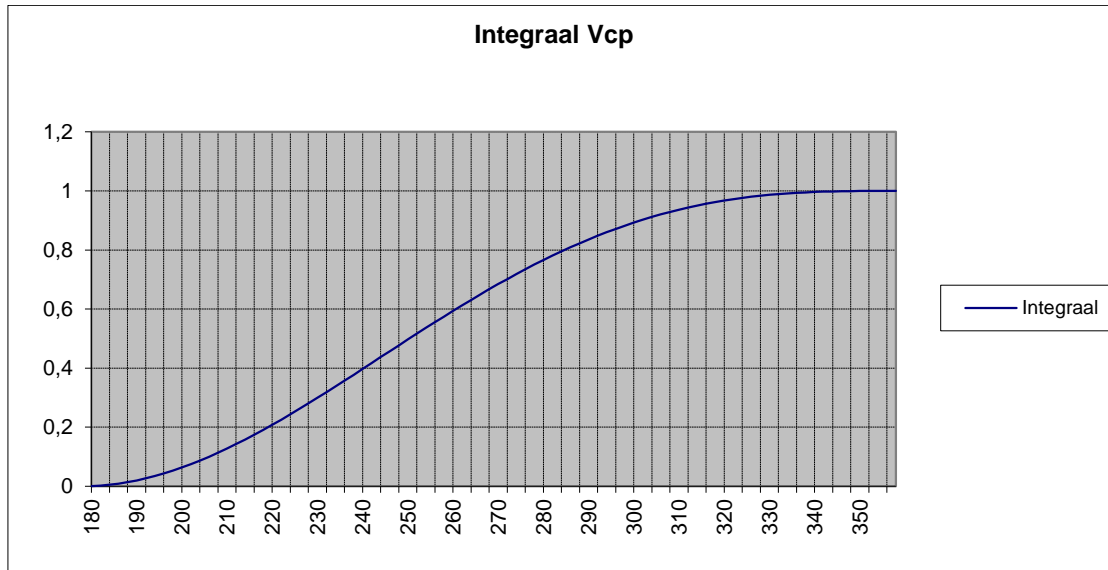


fig. 11

## 7.14 Berekenen van de componenten

Het berekenen van de elementen is nu zeer eenvoudig als we de variabelen  $A_1$ ,  $A_2$  en  $R$  kennen en  $Q_1$  of

$Q_L = \frac{Q_1}{A_1}$  willekeurig kiezen. Immers uit  $Q_L = \frac{L_s \cdot \omega}{R}$  volgt dat

$$L_s = \frac{Q_L \cdot R}{\omega} \quad (7.14.1)$$

Uit  $\frac{1}{R \cdot C_s \cdot \omega} = Q_L \cdot A_1^2$  volgt

$$C_s = \frac{1}{R \cdot Q_L \cdot A_1^2 \cdot \omega} \quad (7.14.2)$$

En uit  $\frac{1}{R \cdot C_p \cdot \omega} = Q_L \cdot (A_2^2 - A_1^2)$  volgt

$$C_p = \frac{1}{R \cdot Q_L \cdot (A_2^2 - A_1^2) \cdot \omega} \quad (7.14.3)$$

en hiermee zijn alle componenten gevonden.

Jan Spaenjers